MUESTRA PARA EVALUACIÓN DOCENTE

numicon®

Números, Patrones y Operaciones

Propuesta metodológica

Oxford EDUCACIÓN

numicon®

Muestra para evaluación docente

Números, Patrones y Operaciones

Propuesta metodológica: Numicon en el aula

Escrito y desarrollado por
Ruth Atkinson, Romey Tacon y Dr. Tony Wing

OXFORD

Acerca de Numicon

El enfoque Numicon es multisensorial, de modo que los niños desarrollan el pensamiento matemático trabajando tres aspectos fundamentales: la comunicación matemática, la exploración de relaciones y la realización de generalizaciones.

Numicon tiene en cuenta los problemas de aprendizaje de las matemáticas, la complejidad de los conceptos numéricos y la importancia de las matemáticas para la sociedad en general.

Numicon pretende facilitar la comprensión de las matemáticas y lograr que los niños disfruten, usando materiales estructurados que permiten desarrollar habilidades de predicción mediante el reconocimientos de patrones. Todo ello mediante la propuesta de actividades multisensoriales basadas en la investigación.

Numicon tiene en cuenta la complejidad de los conceptos numéricos y busca promover la autoconfianza en los niños para que puedan enfrentarse a los diferentes retos o dificultades que se presenten.

Mediante la combinación de la comunicación matemática (estar activos, establecer conversaciones y desarrollar una imagen mental del número), la exploración de relaciones y la generalización, los niños adquieren el respaldo necesario para estructurar sus experiencias, algo esencial para su desarrollo matemático y para su vida en general.

Este enfoque multisensorial les brinda la oportunidad de jugar y disfrutar, aprendiendo contenidos matemáticos. Los profesores y los padres pueden comprobar el nivel de comprensión de sus ideas matemáticas y compartir con ellos sus logros, observando lo que hacen y dicen mientras juegan.

Numicon busca servir de apoyo al profesor, proporcionándole material didáctico, ideas y formación que lo ayudarán a estimular a los alumnos en su *viaje matemático.*

Índice

Bienvenidos a Números, Patrones y Operaciones

Para poder trabajar con Numicon y sacarle el mayor partido posible, es importante familiarizarse con el material de la Caja Numicon, los recursos con los que cuenta el profesor y el material para el alumno.

En esta *Propuesta metodológica:*

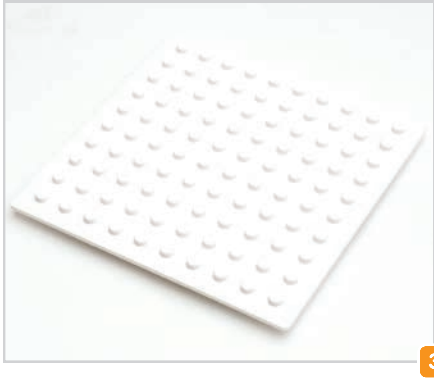
- Se describe el proyecto Numicon.
- Se expone cómo el uso de Numicon influye en la forma de enseñar las matemáticas.
- Se definen los contenidos matemáticos a los que los alumnos se enfrentan en los grupos de actividades.
- Se proporciona información sobre la teoría subyacente a Numicon, desarrollada por el Dr. Tony Wing.

¿Qué hay en las Cajas Numicon?

Educación Infantil	Contenido de la Caja
 **Primeros pasos con Numicon (+ 3 años)**	• Formas Numicon • Línea numérica desplegable Numicon • Clavijas Numicon • Bolsa sensorial Numicon • Tableros Numicon • Plantillas Numicon • Cordones • Libro zigzag Numicon
 **En marcha con Numicon (+ 4 años)**	• Formas Numicon • Línea numérica desplegable Numicon • Clavijas Numicon • Bolsa sensorial Numicon • Tableros Numicon • Plantillas Numicon • Plantillas de sumas Numicon • Línea numérica de mesa • Ruletas Numicon • Banda magnética
 **Bases firmes con Numicon (+ 5 años)**	• Formas Numicon • Regletas Numicon • Clavijas Numicon • Tableros Numicon • Bolsas sensoriales Numicon • Línea numérica desplegable Numicon • Línea numérica de decenas Numicon • Línea numérica 0-31 • Línea numérica 0-100 cm Numicon • Ruletas Numicon • Dados Numicon • Cartas 0-100 Numicon • Tiras de números 1-100 • Buzones Numicon • Bandejas para Regletas Numicon • Guías para regletas 1-100 cm Numicon


1


2


3

4


5

6

Formas Numicon (+ 3 años, + 4 años, + 5 años) 1

Representación manipulativa y visual de los números. Es recomendable que los alumnos tengan su propio juego de Formas Numicon del 1 al 10 para utilizarlas en las sesiones de actividades de gran grupo.

Clavijas de colores (+ 3 años, + 4 años, + 5 años) 2

Piezas rojas, azules, amarillas y verdes, que se utilizan para hacer patrones, composiciones y en la investigación de las soluciones de problemas.

Tablero (+ 3 años, + 4 años, + 5 años) 3

Tablero cuadrado con 100 salientes donde encajan las Formas Numicon. Se puede usar para realizar actividades de cubrir el Tablero con Formas Numicon, para crear diseños simétricos, como base para la construcción de torres con las Formas Numicon y las Clavijas o para descubrir diferentes maneras de combinar las Formas Numicon.

Bolsa sensorial (+ 3 años, + 4 años, + 5 años) 4

Al tocar las Formas Numicon que están dentro de la Bolsa sensorial, se fomenta que los niños visualicen y desarrollen su propia imagen mental y táctil de los números.

Plantillas Numicon (+ 3 años, + 4 años)

Plantillas de dos caras que encajan en el Tablero y ofrecen a los niños numerosas oportunidades de juego. Además, se utilizan en las actividades de ordenación y búsqueda de patrones.

Plantillas de sumas Numicon (+ 4 años)

Plantillas que encajan en el Tablero y se utilizan en las actividades de sumas.

Cordones (+ 3 años) 5

Cuerda fina y suave que permite ensartar clavijas u otros objetos para trabajar patrones y secuencias.

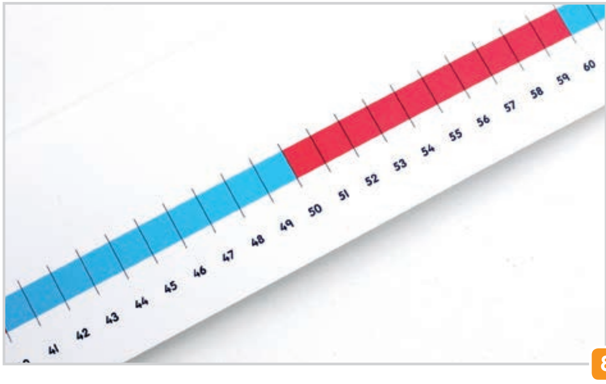
Libro zigzag Numicon (+ 3 años)

Libro que representa la línea numérica del uno al diez con preciosos dibujos. En cada página se muestra un número, dibujos de tantos elementos como representa ese número y el patrón de la Forma Numicon correspondiente. Se utiliza en numerosas actividades de conteo.

Línea numérica desplegable (+ 3 años, + 4 años, + 5 años) 6

Referencia visual para que los niños establezcan conexiones entre las Formas Numicon, los números, los nombres escritos de los números y la línea numérica.

7



8

9

10

Línea numérica de mesa (+ 4 años)
Línea numérica para que los alumnos la usen sobre su mesa. Permite establecer conexiones entre las Formas Numicon, los números, los nombres de los números y la línea numérica.

Línea numérica de decenas (+ 5 años) 7

Muestra Formas Numicon del 10 colocadas horizontalmente de un extremo al otro de la recta, indicando las decenas completas desde el 0 hasta el 100. Ayuda a desarrollar la noción de cardinal de los números hasta el 100 y lo relaciona con su valor posicional.

Línea numérica 0-31 (+ 5 años)

Muestra espaciados los números del 0 al 31 para que los niños puedan colocar un objeto sobre cada número cuando realizan las actividades de conteo, ayudándolos a generalizar la idea de que el último número que cuentan es el que les indica cuántos son.

Línea numérica 0-100 cm (+ 5 años) 8

Muestra una línea en la que se representan los números del 0 al 100 con separaciones de 1 cm entre ellos. La línea numérica está dividida en decenas, que se distinguen alternando el color rojo y el azul. Este recurso también puede utilizarse con las Regletas Numicon.

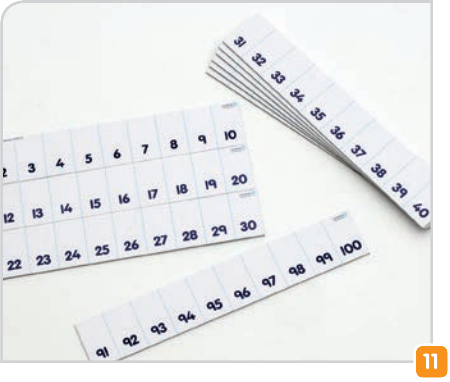
Ruleta Numicon (+ 4 años, + 5 años)
Recurso que puede utilizarse en muchas de las actividades como alternativa a los dados. Sobre ella pueden colocarse distintas plantillas (presentadas como fotocopiables), que permitirán dar instrucciones a los niños sobre números, patrones de las Formas Numicon, el valor de las monedas o los símbolos matemáticos.

Dados Numicon (+ 5 años) 9

Juego de cuatro dados de 22 mm de arista, en el que se muestran los patrones de las Formas Numicon junto con los números: dos dados del 0 al 5, uno del 5 al 10 y otro con los signos + y –. Pueden utilizarse en muchas de las actividades y como alternativa a las ruletas.

Cartas 0-100 (+ 5 años) 10

Juego de cartas numeradas del 0 al 100 que puede usarse en varias actividades para generar números con los que trabajarán luego los niños. También se utilizan en algunas actividades de gran grupo y en actividades y juegos individuales.

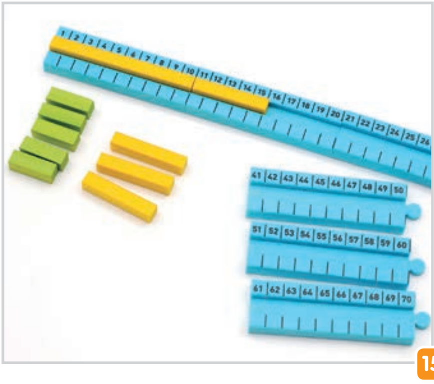


11

12

13

14



15

16

Tiras de números 1-100 (+ 5 años) 11

Diez tiras numeradas del 1 al 10, del 11 al 20, del 21 al 30, etc. Pueden colocarse horizontalmente, una detrás de otra, o como una matriz para formar una cuadrícula.

Buzón (+ 5 años) 12

Buzón de cartulina en el que depositar Formas y cartas Numicon con operaciones escritas. Este recurso ayuda a que las actividades prácticas resulten más atractivas y divertidas.

Regletas Numicon (+ 5 años) 13

Caja que contiene regletas con una base cuadrada de 1 cm de lado y diez longitudes y colores distintos. La más corta es de 1 cm de longitud y la más larga, de 10 cm. Es un material estructurado que permite trabajar los números y las relaciones numéricas. Se usan junto con las Formas Numicon en muchas de las actividades. Al estar marcadas en centímetros, también pueden colocarse a lo largo de la Línea numérica 0-100 cm Numicon.

Bandejas para regletas del 1 al 10 y del 20 (+ 5 años) 14

Una bandeja para cada regleta del 1 al 10 y otra para regletas hasta el 20. Son útiles para construir patrones y trabajar operaciones numéricas con regletas.

Guía para regletas 1-100 cm (+ 5 años) 15

Útiles para enseñar el valor posicional, la multiplicación y la división. Las guías encajan unas con otras para formar otra mayor de un metro de longitud. Diseñadas para que las regletas puedan separarse fácilmente o para colocarse como una matriz.

Banda magnética (+ 4 años, + 5 años)

Tira magnética autoadhesiva que se puede trocear y pegar en la parte posterior de las Formas o Regletas Numicon para utilizarlas sobre una pizarra magnética.

Disponible por separado

Juegos individuales de Formas Numicon del 1 al 10 (+ 3 años, + 4 años, + 5 años)

Se utilizan en las actividades con toda la clase, en las que se invita a cada alumno a trabajar con su propio juego de Formas. Son especialmente útiles, ya que ayudan a los profesores a evaluar las respuestas individuales de los niños a partir de las Formas que estos muestran en la mano.

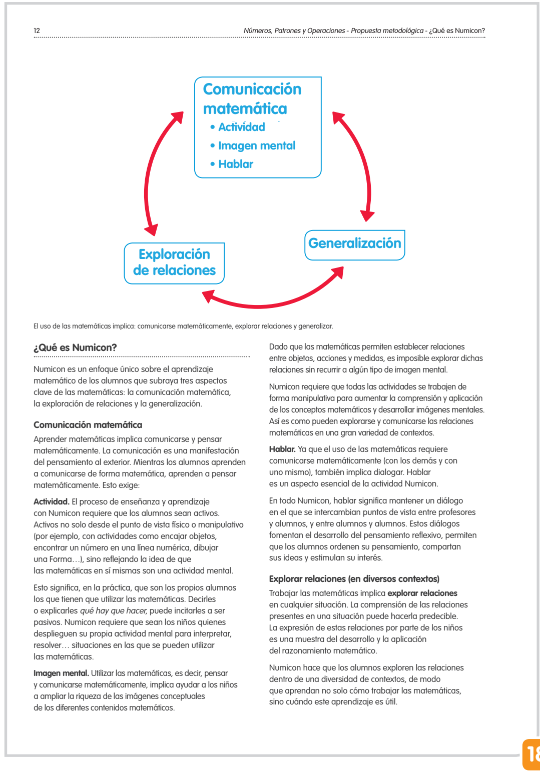
Balanza Numicon (+ 4 años, + 5 años) 16

El uso de la Balanza Numicon con las Formas o Regletas Numicon permite ver a los niños las combinaciones que son equivalentes, ayudándolos a entender que el símbolo = significa de *igual valor* y evitar así que lo confundan con una instrucción para hacer algo. Los niños pueden ver fácilmente qué Formas hay en los recipientes transparentes.

Otros materiales (+ 3 años, + 4 años, + 5 años)

En algunas actividades se utilizan materiales presentes en casi todas las aulas, como cubos multibase, cubos encajables y objetos para clasificar.

17



12 *Números, Patrones y Operaciones - Propuesta metodológica - ¿Qué es Numicon?*

Comunicación matemática
- Actividad
- Imagen mental
- Hablar

Exploración de relaciones

Generalización

El uso de las matemáticas implica: comunicarse matemáticamente, explorar relaciones y generalizar.

¿Qué es Numicon?

Numicon es un enfoque único sobre el aprendizaje matemático de los alumnos que subraya tres aspectos clave de las matemáticas: la comunicación matemática, la exploración de relaciones y la generalización.

Comunicación matemática

Aprender matemáticas implica comunicarse y pensar matemáticamente. La comunicación es una manifestación del pensamiento al exterior. Mientras los alumnos aprenden a comunicarse de forma matemática, aprenden a pensar matemáticamente. Esto exige:

Actividad. El proceso de enseñanza y aprendizaje con Numicon requiere que los alumnos sean activos. Activos no solo desde el punto de vista físico o manipulativo (por ejemplo, con actividades como encajar objetos, encontrar un número en una línea numérica, dibujar una Forma…), sino reflejando la idea de que las matemáticas en sí mismas son una actividad mental.

Esto significa, en la práctica, que son los propios alumnos los que tienen que utilizar las matemáticas. Decirles o explicarles *qué hay que hacer,* puede incitarles a ser pasivos. Numicon requiere que sean los niños quienes desplieguen su propia actividad mental para interpretar, resolver… situaciones en las que se pueden utilizar las matemáticas.

Imagen mental. Utilizar las matemáticas, es decir, pensar y comunicarse matemáticamente, implica ayudar a los niños a ampliar la riqueza de las imágenes conceptuales de los diferentes contenidos matemáticos.

Dado que las matemáticas permiten establecer relaciones entre objetos, acciones y medidas, es imposible explorar dichas relaciones sin recurrir a algún tipo de imagen mental.

Numicon requiere que todas las actividades se trabajen de forma manipulativa para aumentar la comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos y desarrollar imágenes mentales. Así es como pueden explorarse y comunicarse las relaciones matemáticas en una gran variedad de contextos.

Hablar. Ya que el uso de las matemáticas requiere comunicarse matemáticamente (con los demás y con uno mismo), también implica dialogar. Hablar es un aspecto esencial de la actividad Numicon.

En todo Numicon, hablar significa mantener un diálogo en el que se intercambian puntos de vista entre profesores y alumnos, y entre alumnos y alumnos. Estos diálogos fomentan el desarrollo del pensamiento reflexivo, permiten que los alumnos ordenen su pensamiento, compartan sus ideas y estimulan su interés.

Explorar relaciones (en diversos contextos)

Trabajar las matemáticas implica **explorar relaciones** en cualquier situación. La comprensión de las relaciones presentes en una situación puede hacerla predecible. La expresión de estas relaciones por parte de los niños es una muestra del desarrollo y la aplicación del razonamiento matemático.

Numicon hace que los alumnos exploren las relaciones dentro de una diversidad de contextos, de modo que aprendan no solo cómo trabajar las matemáticas, sino cuándo este aprendizaje es útil.

18

Recursos didácticos Numicon

Guías didácticas 17

El proyecto Numicon ofrece al profesor tres guías didácticas:

- La guía didáctica *Primeros pasos con Numicon* (+ 3 años) presenta el proyecto Numicon y ofrece actividades que tienen como objetivo favorecer el desarrollo de las ideas numéricas que servirán de base en la Educación Primaria.
- La guía didáctica *En marcha con Numicon* (+ 4 años) explica los contenidos matemáticos básicos que los niños aprenden durante la etapa de Educación Infantil, además de aportar ideas para la creación de murales y entornos matemáticos. También da pautas para la utilización de los materiales, la evaluación y la enseñanza del lenguaje matemático. En esta guía se ofrecen Sesiones de actividades que pueden clasificarse en ocho grupos: contar, reconocer las Formas Numicon, ordenar las Formas Numicon, reconocer los patrones de las Formas Numicon, asociar las Formas Numicon con su denominación numérica y cifras, usar los patrones Numicon, introducir la suma (adición) e introducir la resta (sustracción).
- La guía didáctica *Bases firmes con Numicon* (+ 5 años) contiene 30 grupos de actividades explicadas de forma muy clara y ejemplificadas con ilustraciones. Cada grupo de actividades comienza con la presentación de un texto que hace referencia al contexto pedagógico, los objetivos del grupo de actividades, el vocabulario matemático que puede desarrollarse y los indicadores de evaluación.

Propuesta metodológica: Numicon en el aula 18

En esta guía se explica qué es Numicon y cómo ayuda a los alumnos a cumplir con las exigencias de la enseñanza de las matemáticas. También se incluyen algunos consejos prácticos sobre qué hacer para enseñar con Numicon y se responden algunas preguntas clave sobre cómo utilizar Numicon en la práctica.

La sección *Contenidos matemáticos básicos* ofrece explicaciones útiles sobre los contenidos matemáticos más importantes que los alumnos trabajarán durante la etapa de la Educación Infantil. También se presenta un capítulo en el que se expone con más detalle el contexto de la investigación que inspiró Numicon y las razones en las que se fundamenta esta pedagogía.

Se pueden consultar las diferentes secciones de la *Propuesta metodológica* cada vez que sea necesario obtener ayuda para la enseñanza.

19

20

Cuadernos para el alumno 19

El proyecto Numicon incluye tres cuadernos que refuerzan las actividades realizadas en el aula mediante el apoyo de los materiales manipulativos (3 años), la guía de las Sesiones de actividades (4 años) y los grupos de actividades (5 años). Además, las fichas permiten pasar de la manipulación reflexiva, que se da durante el desarrollo de las actividades manipulativas Numicon, a la expresión de lo manipulado mediante el lenguaje verbal, gráfico y simbólico.

Los cuadernos son:

- *Primeros pasos con Numicon* (+ 3 años).
- *En marcha con Numicon* (+ 4 años).
- *Bases firmes con Numicon* (+ 5 años).

Los desafíos planteados en estos cuadernos no son exámenes. Las actividades tienen como objetivo averiguar hasta qué punto los alumnos son capaces de poner en práctica lo aprendido en un contexto nuevo o diferente.

Ser capaz de utilizar las matemáticas en una situación nueva o desconocida es un indicador significativo de la comprensión y competencia matemática de los alumnos. Muchas de las actividades de estos cuadernos presentan las matemáticas en un contexto diferente o nuevo, invitando a los niños a demostrar en qué medida son capaces de razonar más que verificar si han aprendido una solución rutinaria.

Al igual que con las actividades en el aula, los alumnos deberían disponer libremente de materiales para razonar la solución de las actividades propuestas en los cuadernos.

Practica en casa 22

Este cuaderno ofrece a los alumnos la oportunidad de discutir y practicar las matemáticas fuera del aula con los padres o tutores.

Hay una propuesta por cada uno de los treinta grupos de actividades para que los alumnos practiquen las matemáticas.

Cada actividad va acompañada de información de apoyo para los padres o tutores sobre lo aprendido en clase y el objetivo de la actividad en sí.

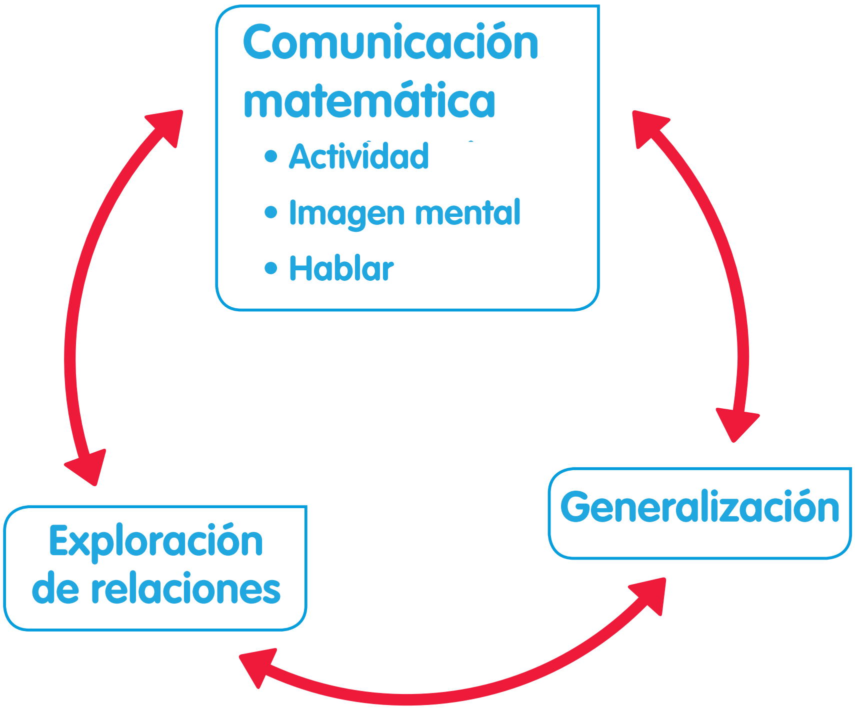
También se incluyen orientaciones para llevar a cabo la actividad, así como sugerencias sobre cómo hacerla más interesante o cómo desarrollarla en una situación de la vida real.

¿Qué es Numicon?

Con el fin de explicar cómo el uso de Numicon en las aulas puede ayudar a los alumnos a aprender matemáticas, en esta sección se aborda:

- Qué es Numicon.
- Qué exigen las matemáticas de los alumnos.
- Cómo el uso de Numicon ayuda a los alumnos.

Más información sobre la teoría subyacente a Numicon del Dr. Tony Wing en la página 58.



El uso de las matemáticas implica: comunicarse matemáticamente, explorar relaciones y generalizar.

¿Qué es Numicon?

Numicon es un enfoque único sobre el aprendizaje matemático de los alumnos que subraya tres aspectos clave de las matemáticas: la comunicación matemática, la exploración de relaciones y la generalización.

Comunicación matemática

Aprender matemáticas implica comunicarse y pensar matemáticamente. La comunicación es una manifestación del pensamiento al exterior. Mientras los alumnos aprenden a comunicarse de forma matemática, aprenden a pensar matemáticamente. Esto exige:

Actividad. El proceso de enseñanza y aprendizaje con Numicon requiere que los alumnos sean activos. Activos no solo desde el punto de vista físico o manipulativo (por ejemplo, con actividades como encajar objetos, encontrar un número en una línea numérica, dibujar una Forma…), sino reflejando la idea de que las matemáticas en sí mismas son una actividad mental.

Esto significa, en la práctica, que son los propios alumnos los que tienen que utilizar las matemáticas. Decirles o explicarles *qué hay que hacer,* puede incitarles a ser pasivos. Numicon requiere que sean los niños quienes desplieguen su propia actividad mental para interpretar, resolver… situaciones en las que se pueden utilizar las matemáticas.

Imagen mental. Utilizar las matemáticas, es decir, pensar y comunicarse matemáticamente, implica ayudar a los niños a ampliar la riqueza de las imágenes conceptuales de los diferentes contenidos matemáticos.

Dado que las matemáticas permiten establecer relaciones entre objetos, acciones y medidas, es imposible explorar dichas relaciones sin recurrir a algún tipo de imagen mental.

Numicon requiere que todas las actividades se trabajen de forma manipulativa para aumentar la comprensión y aplicación de los conceptos matemáticos y desarrollar imágenes mentales. Así es como pueden explorarse y comunicarse las relaciones matemáticas en una gran variedad de contextos.

Hablar. Ya que el uso de las matemáticas requiere comunicarse matemáticamente (con los demás y con uno mismo), también implica dialogar. Hablar es un aspecto esencial de la actividad Numicon.

En todo Numicon, hablar significa mantener un diálogo en el que se intercambian puntos de vista entre profesores y alumnos, y entre alumnos y alumnos. Estos diálogos fomentan el desarrollo del pensamiento reflexivo, permiten que los alumnos ordenen su pensamiento, compartan sus ideas y estimulan su interés.

Explorar relaciones (en diversos contextos)

Trabajar las matemáticas implica **explorar relaciones** en cualquier situación. La comprensión de las relaciones presentes en una situación puede hacerla predecible. La expresión de estas relaciones por parte de los niños es una muestra del desarrollo y la aplicación del razonamiento matemático.

Numicon hace que los alumnos exploren las relaciones dentro de una diversidad de contextos, de modo que aprendan no solo cómo trabajar las matemáticas, sino cuándo este aprendizaje es útil.

Generalizar

En matemáticas, explorar relaciones y buscar patrones en diversas situaciones conduce a la generalización.

Los números son generalizaciones que se usan para hacer predicciones cuando se calcula. Por ejemplo, el «6», el «2» y el «8» en la expresión «$6 + 2 = 8$» son generalizaciones: *6 cosas cualesquiera y 2 cosas cualesquiera sumarán siempre 8 cosas cualesquiera.*

Ejemplos de generalizaciones pueden encontrarse en otras ramas de las matemáticas, como, por ejemplo, la geometría al afirmar que *la suma de los ángulos de un triángulo es 180°* o que *el área de un círculo es* πr^2.

En cada uno de estos casos, la detección de un patrón y el establecimiento de relaciones permite generalizar sobre un número infinito de situaciones similares.

El hecho de usar generalizaciones continuamente cuando se trabaja con las matemáticas es lo que hace que el pensamiento y la comunicación matemática tenga un carácter tan abstracto para los alumnos si no se les invita a que sean ellos mismos los que hagan la generalización.

Comunicarse matemáticamente, explorar relaciones y **generalizar** van unidos cuando se trabaja con las matemáticas.

¿Qué exigen las matemáticas de los alumnos?

Durante la Educación Infantil, los alumnos aprenden a utilizar las matemáticas y se enfrentan a un desafío único en su currículo escolar: pensar y comunicar acerca de objetos abstractos.

Números como el 6 o el 25 son objetos abstractos sobre los que tienen que razonar en estas edades tan tempranas. No es de extrañar que los niños puedan dudar, quedar desconcertados, atascarse o necesitar tiempo para resolver las cosas por ellos mismos.

La mayoría de los matemáticos dirían que trabajar con las matemáticas consiste en buscar patrones en diferentes situaciones. Y así es, pero no solo eso. Cuando se encuentra un patrón, se ha encontrado una regularidad, algo que parece estar ocurriendo siempre, y esto significa que, cualquier patrón puede ser una generalización.

Los números son generalizaciones y, como tales, objetos abstractos. Desde una etapa muy temprana, a los alumnos se les pide que hagan cosas con montones de objetos abstractos, como esos que llamamos «3» y «10».
No 3 bolígrafos o 10 caramelos, solo «3» o la cifra de dos dígitos «10», sin nada más. Muy pronto también se les pide que sumen y resten estos objetos abstractos el uno del otro. En matemáticas, es mucho lo que se espera de los alumnos desde el primer momento.

El problema central: comunicarse con y sobre objetos abstractos

¿Es posible comunicarse con objetos abstractos? Y, dado que el pensamiento tiene una dimensión de diálogo interior o comunicación con uno mismo, *¿es posible pensar en objetos abstractos?*

Abstracto no significa lo mismo que *imaginario.* Los objetos abstractos pueden poseer cualidades que no se pueden imaginar e incluir generalizaciones como *6 cosas cualesquiera.* El problema es que, al intentar imaginar *6 cosas cualesquiera,* se pone de manifiesto que siempre se piensa en *6 de algo (6 bolas, 6 botones, 6 niños…).*

Según Jerome Bruner, el sujeto transforma la información que le llega por medio de tres sistemas de representación. Uno de ellos, la representación simbólica, es la que se utiliza cuando se piensa en objetos abstractos y supone representarlos mediante símbolos.

Lo importante de los símbolos es que no tratan de mostrar literalmente aquello de lo que se está hablando y son arbitrarios. Cuando lo que se está comunicando con estos símbolos es abstracto, la ausencia de una imagen es inevitable: *¿cómo podríamos imaginar algo que es abstracto?* Es fácil imaginar *3 bolígrafos* o *10 amigos,* pero, *¿qué aspecto tendría el «3» abstracto? ¿Y el «10» formado por dos cifras?* Dado que las cifras no tienen el aspecto de las cosas abstractas a las que representan, *¿cómo van a aprender los alumnos a interpretar estos símbolos arbitrarios en su pensamiento y comunicación?* Trabajar con las matemáticas, pensar y comunicar cosas abstractas con símbolos, no es fácil para los niños pequeños.

¿En qué ayuda Numicon?

Numicon hace dos cosas. En primer lugar, parte de que para comprender lo que son los números, los alumnos tienen que generalizar. En segundo lugar, sigue el consejo de Bruner al utilizar las acciones y la visualización de los alumnos para prepararlos para el uso de los símbolos matemáticos en su pensamiento y comunicación.

Según Bruner, las representaciones *enactiva* e *icónica* se utilizan para dar forma a la interpretación que los alumnos hacen de la representación simbólica (por ejemplo, las cifras) que es necesaria para comunicar un patrón (generalización). Para ayudar a esta necesaria generalización, es importante utilizar materiales estructurados.

Generalización y razonamiento

Inicialmente, como ocurre en la enseñanza en general, Numicon recurre a una amplia variedad de objetos cotidianos (como cuentas, cubos, botones… **Fig. 1**) con el fin de ayudar a los alumnos a desarrollar la habilidad de contar antes de introducirlos en las dificultades de las operaciones y el cálculo.

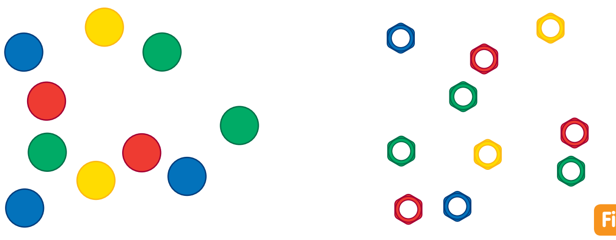


Fig. 1

Es importante destacar que Numicon también introduce conjuntos de materiales estructurados en los que las piezas individuales guardan relaciones entre sí, como, por ejemplo, las Formas y Regletas Numicon (Fig. 2). Los alumnos exploran las cualidades, propiedades y relaciones de estos materiales, ordenando las piezas, comparándolas o combinándolas para formar otras.

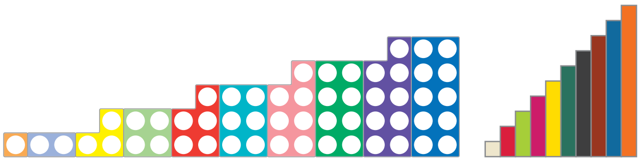


Fig. 2

De este modo, mientras los alumnos trabajan con grupos de objetos (cuentas, cubos) y con materiales estructurados (Formas y Regletas Numicon), combinan objetos e imágenes a la hora de hablar y pensar en números de cosas.

Para trabajar los números, se utilizan conjuntamente materiales estructurados y no estructurados que permitan la representación simbólica, a la vez que se desarrolla la acción y la visualización de objetos.

Las líneas numéricas (Fig. 3)se introducen para representar mejor la ordenación que se evidencia en los materiales estructurados y para reforzar el concepto de orden de los números.

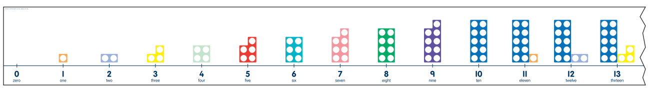


Fig. 3

Es importante señalar que los grupos de objetos se disponen como patrones de las Formas Numicon y que las Regletas Numicon son equivalentes en longitud a diferentes múltiplos de la regleta más pequeña o *regleta unidad* (Fig. 4).

Fig. 4

A través de estas actividades, los alumnos comprenden que cualquier grupo de objetos se puede colocar siguiendo los patrones de las Formas Numicon y de este modo pueden *leerlos*. Aprenden a ver cuántos objetos hay en una colección, sin contarlos, y que los números de cosas toman *una forma* de manera organizada.

Llegado este momento, es posible preparar a los alumnos para generalizar sobre los números mediante la exploración de relaciones entre números de objetos. El pensamiento y la comunicación matemática de los niños continúa desarrollándose con la manipulación de los objetos que se les proporciona, y con la expresión oral de lo que ven y hacen.

Los alumnos podrán llegar a realizar la generalización de que cualquier colección de objetos puede colocarse formando patrones de Formas Numicon; también que cualquier número de regletas unidad puede ser intercambiado por una o más regletas más largas; por último, que cualquier número de objetos es equivalente a una o más Formas o Regletas Numicon.

Al darse cuenta de que cualquier colección de objetos puede colocarse como los patrones de las Formas Numicon, y que cualquier número de regletas unidad es equivalente a una o más Regletas Numicon, los alumnos serán capaces de *generalizar* cualquier ejemplo.

Las Formas y Regletas Numicon pueden, a su vez, utilizarse para explorar y comunicar relaciones numéricas en general. También sirven de *mediadores de comunicación* en las conversaciones sobre los números y sus relaciones.

A modo de ejemplo, la Forma Numicon de tres agujeros encaja con la Forma de cinco agujeros. El resultado es equivalente a la Forma que tiene ocho agujeros (Fig. 5).

Del mismo modo, la regleta que vale tres unidades colocada en fila con la que vale cinco unidades, forman una regleta que vale ocho unidades (Fig. 6).

Cuando se colocan en fila la *regleta 3* y la *regleta 5* sobre una línea numérica, llegan a la posición marcada con el *8.*

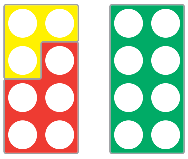


Fig. 5

Fig. 6

Partiendo de estas acciones y con estas imágenes, los alumnos serán capaces de generalizar que *tres cosas* y *cinco cosas juntas siempre forman ocho cosas.*

Esta generalización puede expresarse utilizando los símbolos numéricos y verbales: *3* y *5 juntos equivalen a 8.*

Más adelante, utilizando otras acciones e ilustraciones, los alumnos son capaces de interpretar y utilizar los signos «+» e «=» para expresar sus generalizaciones de este modo:

$$3 + 5 = 8$$

Es importante señalar que, llegada esta etapa, los niños tendrán que empezar a utilizar en el lenguaje oral los términos numéricos (uno, dos, tres) como sustantivos en lugar de como adjetivos (dos caramelos, tres lápices).

Con el uso de los términos numéricos como sustantivos, aparecen en el pensamiento matemático de los alumnos los números como *objetos abstractos,* a los que se hace referencia mediante *símbolos.*

Dicha generalización puede entonces aprovecharse aún más. Si *tres cosas* y *cinco cosas* juntas siempre suman *ocho cosas,* entonces:

3 decenas + 5 decenas = 8 decenas
3 centenas + 5 centenas = 8 centenas
3 millones + 5 millones = 8 millones
o
30 + 50 = 80
300 + 500 = 800
3 000 000 + 5 000 000 = 8 000 000

Los niños pueden comenzar a utilizar en esta etapa las generalizaciones y la notación mediante símbolos para pensar y comunicarse matemáticamente.

Progresar con Numicon

El ejemplo anterior pone de manifiesto cómo Numicon sirve de apoyo a la enseñanza de las matemáticas que los alumnos utilizarán más adelante.

A los niños se les ofrece la oportunidad de ilustrar las relaciones que observan entre los objetos de muchas formas y con materiales muy variados. Esto les permite realizar generalizaciones, pensarlas y comunicarlas, utilizando los símbolos de las matemáticas.

Evidentemente, no basta con el ejemplo anterior para poner de manifiesto todas las relaciones que los niños tienen que explorar, las generalizaciones que deben realizar y, por tanto, los símbolos que tienen que aprender a interpretar y utilizar. Sin embargo, dondequiera que se aplique, el enfoque es esencialmente el mismo. Las representaciones *enactiva* e *icónica* se utilizan para ir conformando la interpretación de los niños de la representación *simbólica* necesaria para pensar y comunicar su detección de patrones (generalización), en continuo desarrollo.

La tarea se va complicando a medida que los alumnos progresan en su trabajo con los números y se van introduciendo conceptos como el valor posicional, la descomposición, las fracciones, los decimales y los números negativos. El trabajo con estos conceptos es igualmente posible, utilizando el enfoque anterior para llegar a la generalización y al uso de símbolos que permitan comunicar información sobre los objetos matemáticos abstractos. Así es cómo los símbolos matemáticos adquieren sentido.

En geometría, las generalizaciones que los alumnos descubren se van produciendo más gradualmente a medida que progresan en su capacidad de razonar sobre objetos abstractos inventados, como, por ejemplo, *cualquier triángulo* y, más adelante, *cualquier polígono.*

Es imposible dibujar el objeto abstracto *cualquier triángulo* de la misma forma que es imposible imaginar *seis objetos cualesquiera.* En el momento en el que se dibuja un triángulo, comoquiera que se haya hecho, se ha dibujado un triángulo concreto; ya sea isósceles, equilátero o escaleno, lo que se ha dibujado no es un triángulo general, sino uno particular (Fig. 7).

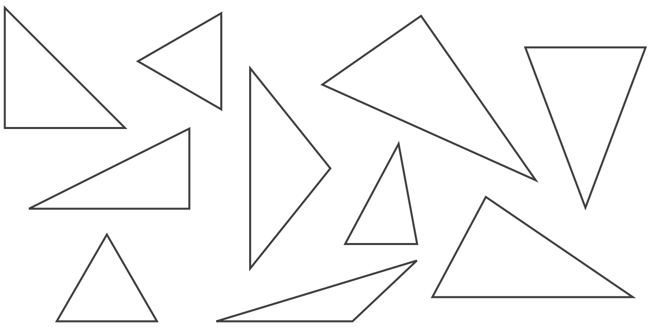
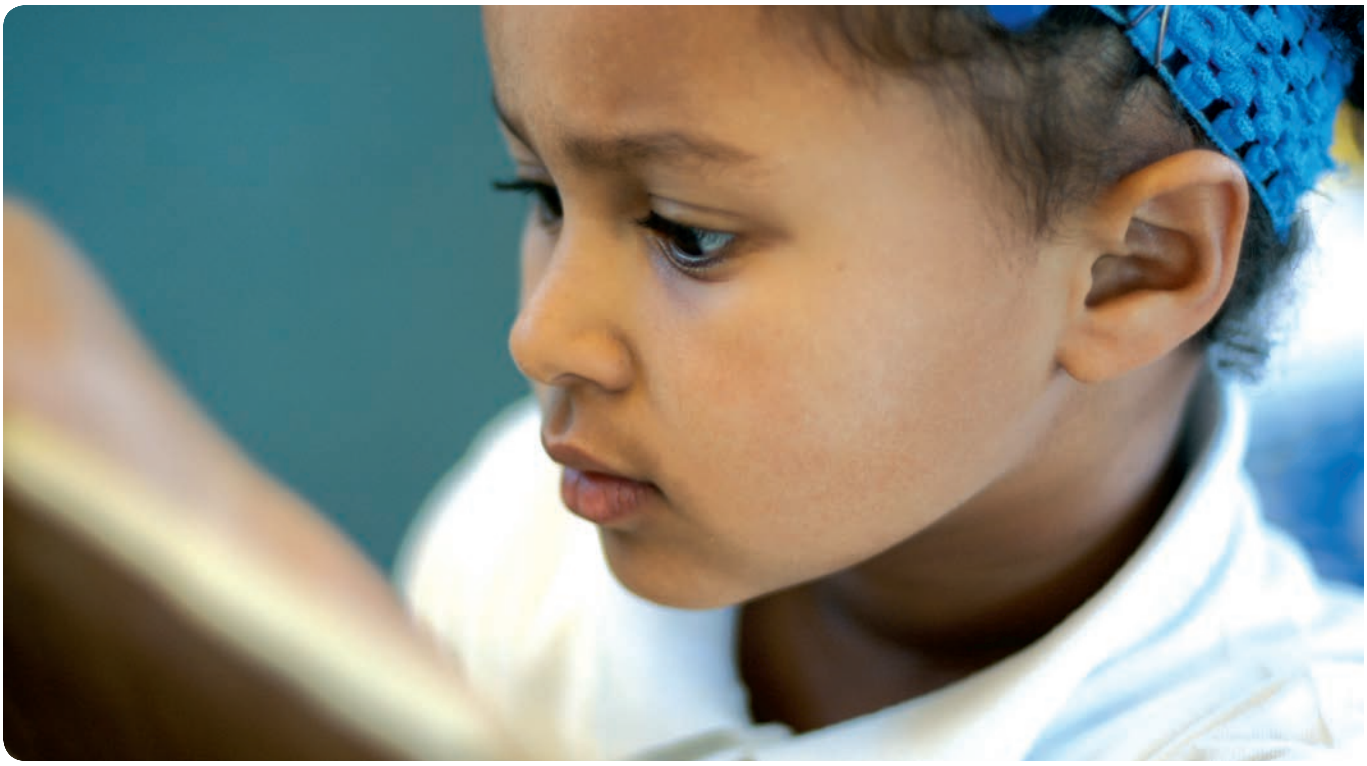


Fig. 7

Sin embargo, al igual que en la generalización sobre números, al trabajar la geometría con acciones e imágenes *(representaciones enactiva e icónica)* se prepara a los alumnos para razonar sobre cualquier triángulo con la representación simbólica (palabras y símbolos).



En este ejemplo, mientras los alumnos construyen y exploran una gran variedad de triángulos con diferentes materiales, lo que están manipulando y visualizando son las longitudes de los lados, que pueden variar infinitamente al cambiar los ángulos, y los ángulos, que pueden variar infinitamente al cambiar las longitudes de los lados. Sin embargo, pese a la variedad de lo que observan, las figuras que están creando siempre son triángulos.

Las imágenes mentales derivadas de estas experiencias manipulativas les permiten hablar y pensar de *cualquier triángulo* mientras imaginan una figura plana infinitamente flexible con tres lados rectos.

Fijándose en que los lados son rectos, que son siempre tres y encajan para *cerrar* las formas que hacen y, dejando de lado las longitudes de los lados y la amplitud de los ángulos, los alumnos llegan a ser capaces de imaginar *cualquier triángulo* y de razonar sobre él con palabras y símbolos.

Cuando los alumnos pueden imaginar y hablar de *cualquier triángulo,* están en condiciones de generalizar que, por ejemplo, los *ángulos de cualquier triángulo suman 180º*, utilizando acciones, imágenes o mediante símbolos.

Del mismo modo que se llega a la generalización con números, la exploración de relaciones en geometría mediante la acción y las imágenes prepara a los alumnos para razonar correctamente sobre objetos matemáticos abstractos mediante símbolos.

Usar las matemáticas en la vida cotidiana

El uso de las matemáticas en la vida cotidiana no se limita solo a hacer generalizaciones y a utilizar símbolos. También implica hacer uso de las generalizaciones para resolver problemas en situaciones concretas.

Por ejemplo, la generalización $4 \times 25 = 100$ permite predecir que el perímetro de una cuadrado de 25 cm será de 100 cm o que el área de un campo que mide 4 m por 25 m será de 100 m^2 o que si ahorras 25 € a la semana, después de cuatro semanas tendrás 100 €. También puede ser muy útil para ayudar a calcular que:

$$36 \times 25 = (9 \times 4) \times 25 = 9 \times (4 \times 25) = 900$$

Los alumnos necesitan ser capaces de relacionar la representación simbólica de una generalización con una situación de la vida cotidiana en la que esta es útil. Por ejemplo, aprenden a dividir, pero necesitan asimilar y entender cuándo es útil dicha operación, en qué situaciones se aplica.

Los materiales didácticos Numicon organizan las actividades en grupos relacionados con contenidos matemáticos, como, por ejemplo, *Suma de dos o más números.* Cada grupo de actividades se introduce mediante un contexto donde se ve la utilidad de las matemáticas.

Dichos contextos ayudan a los alumnos a entender la funcionalidad de lo que están aprendiendo.

Flexibilidad, fluidez y perseverancia

Utilizar las matemáticas con eficacia incluye ser capaz de recordar generalizaciones conocidas, como las *tablas de multiplicar* o las *operaciones numéricas básicas.* Hay muchas actividades prácticas en los materiales Numicon que animan a los alumnos a familiarizarse con las operaciones básicas.

Además, ser eficaz incluye un aspecto esencial como es la flexibilidad de pensamiento.

La representación de experiencias por medio de la acción permite a los alumnos hacer y deshacer. Por ejemplo, los alumnos pueden averiguar cuántos objetos hay en una colección, agrupándolos en decenas (y centenas) y, más adelante, cuando se introduzca la división, aprenderán que deben deshacer esos grupos.

Combinando y separando las Formas y las Regletas Numicon *(hacer y deshacer),* los alumnos son capaces de conectar la suma y la resta como operaciones inversas y comprobar si el resultado de una resta es correcto utilizando la suma.

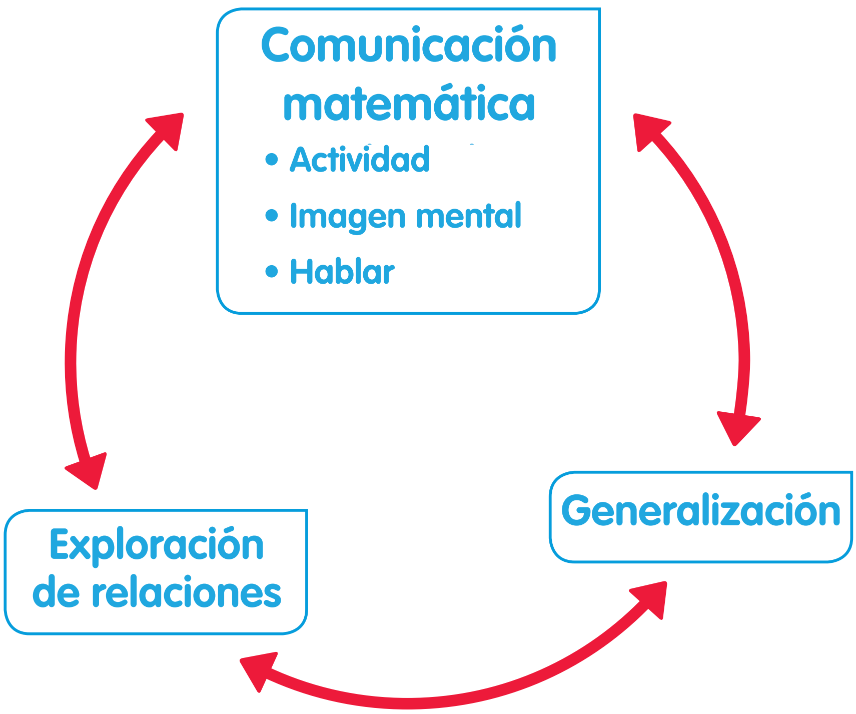
Promover diversas formas de cálculo hace que los alumnos sean capaces de elegir el adecuado, mediante un análisis de los números implicados, en lugar de adoptar un método estandarizado para cualquier cálculo. *¿Por qué restar 1998 a 4673 colocándolos en vertical solo porque sean números altos?*

Dado que Numicon aborda el uso de símbolos matemáticos por parte de los alumnos mediante actividades y acciones, si los niños se quedan *atascados* o dudan, siempre es posible recordarlos y volver a las actividades e ilustraciones de apoyo de las que surgió la generalización. Por ejemplo, si están trabajando números utilizando símbolos, se puede volver de nuevo a las representaciones *enactiva* e *icónica,* utilizando las Formas y Regletas Numicon.

Por último, dado que Numicon da gran importancia a la comunicación matemática, es necesario recalcar a los alumnos que cuando se sientan *atascados* lo que deben hacer es comunicarlo.

La actividad, el desarrollo de imágenes mentales y la comunicación de las relaciones entre objetos suponen usar las matemáticas.

La perseverancia –una cualidad extraordinariamente valiosa cuando se trata de las matemáticas– consiste en continuar comunicándose, con uno mismo y con los demás, cada vez que uno no sabe adónde se dirige.



Dr. Tony Wing: La teoría en la que se apoya Numicon

Los profesores que utilizan Numicon enseguida se dan cuenta de lo que aprenden de las respuestas de los alumnos, como también lo hacemos los autores.

Por consiguiente, nuestra comprensión de las diversas maneras en las que los materiales estructurados pueden ser útiles a los niños en su aprendizaje de las matemáticas va aumentando continuamente.

Utilizar Numicon implica, en efecto, cierto grado de comprensión de la teoría subyacente, incluida una idea de a qué se enfrentan los niños mientras aprenden a usar las matemáticas.

La siguiente sección aborda lo que hemos aprendido en nuestro trabajo hasta este momento, a fin de ayudar a usar las actividades y materiales que hemos elaborado.

Usar las matemáticas: actividad y exploración de relaciones

Resulta muy útil considerar las matemáticas como una actividad mental, en lugar de como un montón de datos y técnicas que deben adquirirse de forma pasiva.

La razón por la que las matemáticas son consideradas tan importantes en la escuela está en el deseo de que, una vez que han terminado el colegio, los alumnos no solo recuerden parcialmente esos datos y técnicas que utilizaron para aprobar sus exámenes, sino que sean capaces de usarlos satisfactoriamente para resolver nuevos y desconocidos desafíos matemáticos en su vida diaria y en su trabajo.

Ser capaz de usar las matemáticas conlleva saber establecer relaciones y manipularlas para predecir resultados de interés. Por ejemplo, cuando se va de compras, las relaciones podrían incluir precios, presupuestos, monedas y disponibilidad de efectivo. Todas ellas podrían manipularse para predecir si algo es asequible y, en tal caso, cómo pagarlo. Generalmente, una situación como esta requiere algo de cálculo. Aquí, las relaciones que se establecerían entre números podrían consistir en aplicar la suma o la resta para predecir el total o la cantidad que nos tienen que devolver.

En el ejemplo anterior se pueden destacar tres aspectos del uso de las matemáticas:

- En primer lugar, hay que averiguar qué cantidades son importantes en la situación dada y cómo están relacionadas entre sí.
- En segundo lugar, hay que hacer algunos cálculos con esas cantidades.
- En tercer lugar, hay que interpretar los resultados del cálculo a fin de predecir qué ocurrirá una vez se haya tomado una determinada decisión.

Identificar y establecer relaciones en una situación con el objetivo de predecir unos resultados supone la búsqueda de la *solución de problemas matemáticos* y hacerlo implica **explorar relaciones** (conexiones entre cosas) dentro de una situación.

Incluso un problema tan sencillo como, *¿Cuántos alumnos van a comer hoy en el colegio?,* implica cierto tipo de relación de orden para predecir el resultado con éxito. Por ejemplo, si no se cuenta a los niños en orden, puede que alguno quede sin contar o se cuente al mismo dos veces. Dentro de Numicon se anima constantemente a los alumnos a explorar las relaciones en diferentes situaciones para encontrar patrones y regularidades y usarlos para hacer predicciones. Esto es fundamental para poder usar las matemáticas a cualquier nivel.

Hay que señalar que, cuando se quiere solucionar un problema de la vida real, como calcular el coste de la compra, se llega al punto en el que el contexto práctico se olvida y el trabajo se lleva a cabo estrictamente con *números*. Retroceder y avanzar entre situaciones concretas y el abstracto mundo de los números constituye uno de los principales retos a los que los alumnos se enfrentan a la hora de usar las matemáticas.

Algunos problemas surgen dentro de un *mundo numérico abstracto,* como, por ejemplo, calcular con más eficacia. Sin embargo, también estas situaciones requieren ser activos, explorar y utilizar las diversas relaciones que implican los números en sí.

Es importante tener en cuenta que utilizar las matemáticas en la vida diaria supone averiguar qué hacer en determinadas situaciones, ya que, a diferencia del colegio, no existe un programa planificado que pueda ayudarnos y los adultos tienen que ser capaces de enfrentarse a cualquier cosa que pueda surgir. Los alumnos también tienen que aprender a enfrentarse al desafío de ser capaces de usar las matemáticas en situaciones nuevas y, a menudo, desconocidas, en lugar de intentar recordar unas técnicas determinadas que han aprendido en un tema en concreto.

Esto tiene unas implicaciones importantes tanto para la enseñanza como para la evaluación. Los alumnos necesitan aprender a usar las matemáticas en situaciones nuevas y desconocidas y explorar y manipular las relaciones entre las mismas. Los alumnos aprenden a utilizar las matemáticas en terrenos inexplorados[1].

Generalizar, pensar y comunicar

Utilizar las matemáticas hace predecible el mundo cotidiano en muchísimos aspectos. Por ejemplo, cuando uno se sube a un avión, espera llegar sano y salvo a su destino; se confía en que se puede encontrar comida en las tiendas habituales, como y cuando se quiera; se espera que la electricidad funcione en las casas y lugares de trabajo cada vez que se pulsa un interruptor. *¿Cómo es que estas expectativas cotidianas se cumplen tan a menudo?* La respuesta es que una serie de ingenieros aeronáuticos, pilotos, especialistas en logística, ingenieros eléctricos y estadísticos predicen estas cosas, utilizando las matemáticas.

El uso de las matemáticas implica una forma única de pensar y comunicar situaciones; una forma especial de comunicación, que ha sido desarrollada desde que los seres humanos comenzaron a interesarse por las cantidades y las relaciones.

Curiosamente, la comunicación matemática no solo se produce cuando se habla con alguien, sino que todas las personas se comunican matemáticamente con ellas mismas cada vez que las usan. Esto se llama pensar. Por ejemplo, si se intenta multiplicar 481 por 37, puede escucharse una voz interior mientras se hace, se puede oír el pensamiento de uno mismo mientras se comunica el cálculo a uno mismo.

Es importante comprender cómo se desarrolla el pensamiento y la comunicación. A partir del trabajo de Vygotsky, Sfard[2] argumenta que el pensamiento se desarrolla como una versión propia e individualizada de la comunicación que se mantiene con otros. Esto significa que el pensamiento matemático de los alumnos es una versión individual de la comunicación que mantienen con sus profesores. Los niños aprenden a pensar participando de forma activa en la comunicación matemática que los rodea, incluyendo la comunicación consigo mismos.

1 Sobre este tema, véase más en Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

2 Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating: Human Development, the Growth of Discourses, and Mathematizing.* New York: Cambridge University Press.

Las capacidades de predicción y de comunicación en matemáticas están muy relacionadas. El hecho de que uno de los objetivos de las matemáticas sea predecir mediante la detección de patrones y regularidades es lo que ha determinado que el pensamiento y la comunicación matemáticos se hayan desarrollado como lo han hecho. Más concretamente, las matemáticas hacen predecibles las situaciones a través de la **generalización.** Como consecuencia de ello, con lo que se comunica y de lo que se comunica son **generalizaciones.**

Por ejemplo, el «3» es una generalización y los niños deben entenderlo como *3 cosas cualesquiera;* los datos numéricos que los alumnos deben recordar son generalizaciones, así $6 + 2 = 8$ significa *6 cosas cualesquiera* y *2 cosas cualesquiera sumarán siempre 8 cosas cualesquiera.* En geometría, cuando se dice que los *ángulos de un triángulo suman 180°,* se quiere decir de cualquier triángulo, no de uno en particular.

Las generalizaciones son importantes porque se pueden utilizar para predecir resultados en situaciones determinadas. Por ejemplo, la generalización $4 \times 25 = 100$, puede utilizarse para averiguar que el perímetro de un cuadrado de 25 cm de lado será de 100 cm o que si se ahorra 25 € a la semana, en cuatro semanas se tendrán 100 € en total. También podría utilizarse para calcular que:

$$36 \times 25 = (9 \times 4) \times 25 = 9 \times (4 \times 25) = 900$$

En otras palabras, innumerables tipos de situaciones particulares pasan a ser mucho más manejables debido a una generalización.

Es necesario que los alumnos aprendan *datos numéricos* como, por ejemplo, que $6 \times 3 = 18$, pero lo más importante para que estos les sean útiles es que lleguen a ellos de una forma activa, a través de la realización de sus propias generalizaciones, y que aprendan cómo pueden usar estas generalizaciones en su pensamiento y comunicación matemáticos para hacer más predecible el mundo en el que viven.

El concepto de generalización, a pesar de ser una abstracción, se puede explicar como una simple *búsqueda de patrones.* El ser humano es excelente a la hora de buscar y encontrar patrones en sus experiencias. Los niños, en particular, son muy buenos en el análisis de patrones desde el día en que nacen. De hecho, aprenden la lengua materna prestando una extraordinaria atención a los patrones de los sonidos que escuchan.

Numicon conecta con esta increíble facilidad que tienen los niños para detectar patrones en diferentes situaciones. En ello radica la clave de pensar y comunicarse matemáticamente.

¿Cómo nos comunicamos matemáticamente?

Dada la gran cantidad de generalizaciones que se utilizan en las matemáticas, comunicarse no es fácil.

En primer lugar, la aplicación de generalizaciones para la resolución de algunos problemas puede hacer que algunas personas encuentren las matemáticas abstractas y, equivocadamente, desconectadas de la vida cotidiana.

En segundo lugar, es muy difícil hablar y pensar, en cualquier cosa en general, imaginando algo en particular. Cuando se desea decir algo sobre las personas en general, habitualmente se tiene en mente una experiencia con personas concretas; cuando se habla con los alumnos de los triángulos en general, se les suele mostrar un triángulo o varios concretos. Lo mismo ocurre con las generalizaciones numéricas.

Cuando se habla a los alumnos de la generalización del «3», a menudo se les muestran tres cosas concretas, por ejemplo, tres fichas, aunque de algún modo se les esté pidiendo que lo interpreten como *3 cosas cualesquiera.* Saber ver *lo general en lo particular*[3] es clave para el uso de las matemáticas.

El desarrollo del pensamiento y la comunicación matemáticos depende de lo que se habla cuando se usan las matemáticas, tanto con uno mismo como con los demás.

Durante siglos, el ser humano ha desarrollado formas sofisticadas y eficaces de pensar y hablar sobre los números y otras generalizaciones matemáticas. No es de extrañar que los niños a veces encuentren difícil asimilarlas inmediatamente.

En la comunicación matemática de cantidades y números de cosas, las generalizaciones se convierten en *objetos matemáticos.* Por ejemplo, dado que sería muy incómodo estar siempre hablando de generalizaciones numéricas como *6 cosas cualesquiera* o *242 cosas cualesquiera,* en la práctica se dice solo «6» o «242». Y esto tiene sus consecuencias.

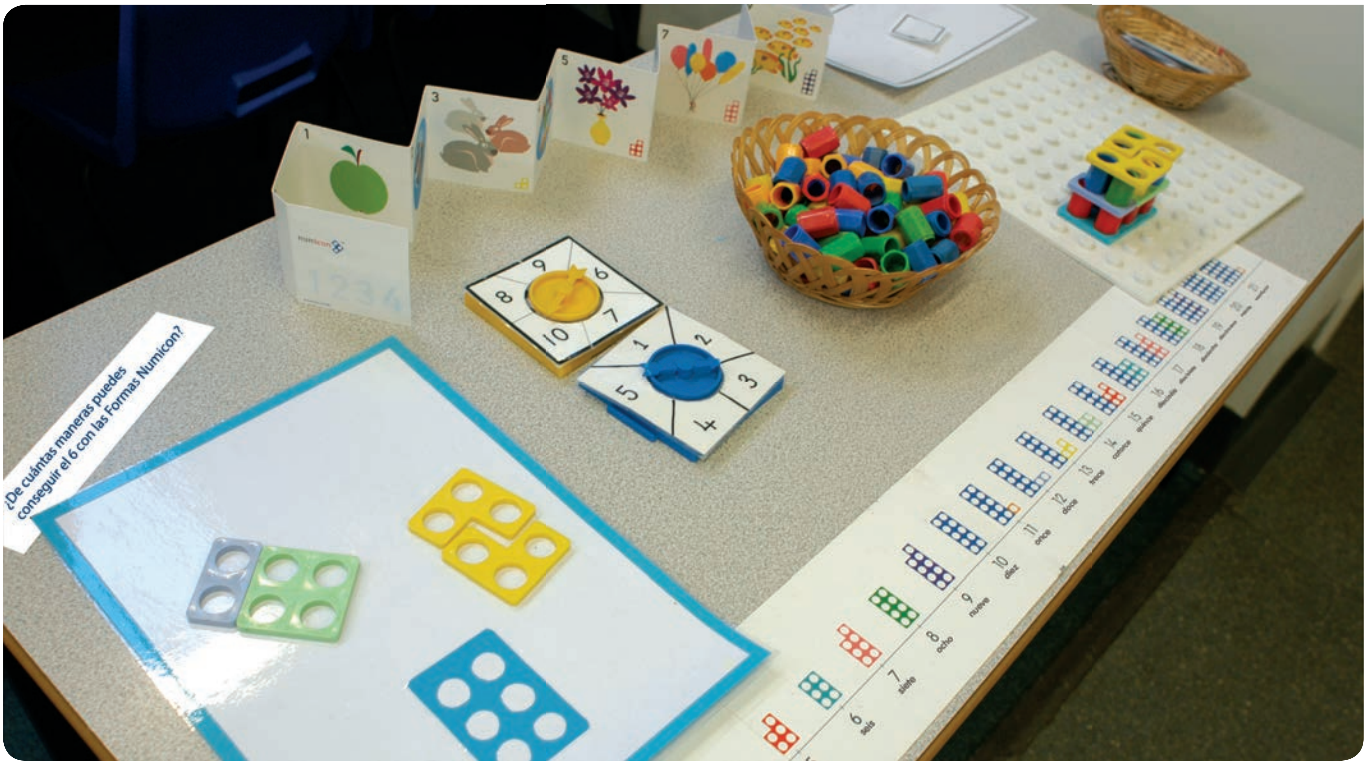
De esta manera casi accidental, los adultos, como expertos matemáticos, han optado por utilizar los términos numéricos como nombres y hablar y pensar en las generalizaciones *6 cosas cualesquiera* o *242 cosas cualesquiera* como si fueran, en realidad, objetos materiales existentes en el mundo, como, por ejemplo, sillas, mesas o ranas. Estas generalizaciones que convierten los objetos matemáticos en cosas se llaman *números.* En el ejemplo anterior, los objetos matemáticos «6» y «242» convierten estas expresiones de generalización en números.

Es importante tener en cuenta que, al nombrar algo utilizando una palabra como sustantivo, se anuncia implícitamente que se trata de una cosa o un objeto; así pues, al utilizar palabras y símbolos numéricos como sustantivos en lugar de como adjetivos, los niños se dan cuenta de que hablar de números es hablar de algún tipo de objeto.

Una generalización, como, por ejemplo, un número, no es una cosa material, sino un pensamiento construido mediante el uso de palabras o símbolos, y esto comienza a trabajarse muy pronto con los alumnos.

Curiosamente, la mayoría de las personas que han aprendido hace mucho tiempo a manejar los números tienden a sentirse como si de verdad pudieran moverlos y conectarlos cuando hacen cálculos, ya sea sobre el papel o mentalmente. Los adultos con conocimientos de aritmética generalmente hacen cálculos con números sobre el papel o en la calculadora como si esos símbolos fueran de alguna manera generalizaciones numéricas.

3 Mason, J. & Pimm, D. (1984). Generic Examples: Seeing the General in the Particular, *Educational Studies in Mathematics,* 15 (3), 277–290.



Por ejemplo, al intentar dividir 273 entre 46, tienen la sensación de que estos números se están tratando como si fuesen objetos de algún tipo y debieran moverlos e intercambiarlos por otros según las reglas que les han enseñado. *¿No es cierto que los números se convierten en cosas sobre el papel, o cifras en su cabeza o en la pantalla de la calculadora mientras hace los cálculos?*[4]

Los adultos piensan y hablan sobre las generalizaciones que se llaman números como cosas u objetos, como si estos objetos matemáticos fueran el mismo tipo de cosas que los objetos físicos del mundo cotidiano. Se les maneja, se les mueve, se les pone en fila en un papel. En general, las cifras se utilizan como si fueran *cosas numéricas* que se han inventado. *¿Cómo es posible que los niños encuentren sentido a todos estos objetos matemáticos invisibles de los que, de repente, empiezan a hablar junto con cifras en el colegio?*

Lo primero que llama la atención es que son demasiados los alumnos que no llegan a encontrar sentido a los objetos numéricos durante sus años de escolarización. En la práctica, se espera que los niños muy pequeños pasen paulatinamente de hablar de *tres caramelos* o *tres lápices,* utilizando las palabras numéricas como adjetivos referidos a objetos físicos, a hablar solo de «3», la misma palabra utilizada en este caso como sustantivo, como hacen los adultos.

4 Resulta significativo que la mayoría de las personas utilicen distintas imágenes, así como dígitos numéricos, cuando hacen cálculos. Pero cuando se les pide que imaginen el número *noventa y cuatro,* por ejemplo, la mayoría imaginan dos dígitos numéricos (94), en ese orden, al margen de si también existe o no una imagen como una línea numérica determinada.

Después, mucho más adelante, cuando se introducen las fracciones, se espera que pasen de decir *media pizza* o *media chocolatina* a hablar solo de «1/2», como algo que no es *la mitad de* nada en particular.

Todo esto puede resultar muy extraño, y la mayoría de los niños pequeños no lo entienden con facilidad, mientras que los adultos esperan que *simplemente traten de aceptarlo.*

¿Qué se les muestra a los niños cuando se habla de números?

Muchas veces, en el mismo momento en el que a los alumnos se les está hablando de estas generalizaciones, por ejemplo, los números, utilizando para ello sustantivos, se comienza a hacer hincapié en los símbolos numéricos como si fuera evidente que lo que están viendo en la pizarra o en el papel fueran los números de los que se está hablando.

Existe una razón de peso para utilizar la *representación simbólica* en la comunicación matemática. Según Bruner, solo es posible hablar de generalizaciones mediante las *representaciones simbólicas*[5]. No es posible hacer un dibujo para mostrar *6 de nada* porque, al intentar hacerlo o contar 6 objetos físicos, los niños ven *6 cosas de algo.* La representación simbólica es lo que permite la comunicación sobre cosas inventadas, en este caso, los números.

5 Véase Bruner, J. (1966). *Towards a Theory of Instruction.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

A menos que se introduzcan con mucho cuidado, los niños suelen pensar que las cifras que ven son, en realidad, los *misteriosos objetos numéricos.*

Es más, tienen que entender que, por ejemplo, *3 más 3 es igual a 6.* Es muy difícil encontrar sentido a estas relaciones numéricas si con lo único con lo que nos comunicamos son palabras y símbolos: *3* y *3 juntos no parecen 6, sino 33.*

La dificultad está en encontrar formas de comunicar sobre objetos matemáticos que los alumnos no pueden ver, por ejemplo, los números, de manera que se evite confundirlos con las cifras, y que les permitan explorar relaciones entre los mismos.

Una solución es introducir objetos e imágenes en la comunicación. Es decir, utilizar unas formas especiales para **ilustrar,** de forma activa y visual, las relaciones entre las generalizaciones abstractas.

Esta es la razón por la que, cuando se introduce a los alumnos en los números, los profesores suelen preparar colecciones de objetos e imágenes y utilizar las acciones con dichos objetos para ayudarlos a *ver* y *sentir* cómo los objetos numéricos invisibles inventados con palabras se relacionan unos con otros[6].

Este es el momento crucial en el que los alumnos deben empezar a *ver lo general* en las imágenes particulares que se les presentan. Se los puede ayudar, hablando con ellos mientras trabajan. Si usan fichas para contar o cubos, cuentas, alubias… para hablar de números, lo que se espera es que los alumnos se centren solo en *cuántos hay* e ignoren los diferentes tipos de objetos. Los niños se fijan en cuántos objetos distintos tienen delante e ignoran el tipo de objetos que son. De *resaltar* o *ignorar*[7] depende la capacidad de *ver lo general en lo particular.* Las conversaciones con los alumnos son fundamentales porque nos permiten reflexionar sobre cómo piensan. Será necesario preguntarles muchas veces: *¿Creéis que el cálculo sería diferente si estas fichas fueran alubias? ¿Y si fueran lápices?*

En términos de Bruner, dado que mediante el pensamiento y la comunicación matemáticos los alumnos trabajan con generalizaciones, al final acabarán aprendiendo a hacerlo de forma más eficaz mediante el uso de la representación simbólica, por ejemplo, utilizando signos y palabras al escribir y hablar para representar generalizaciones numéricas.

6 Esto combina los tres modos de representación de Bruner, *enactivo, icónico* y *simbólico,* para enriquecer el aprendizaje de los niños lo más posible.

7 Véase una interesante exposición de esto y otras opiniones relacionadas en Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (Eds) (2004). *Fundamental Constructs in Mathematics Education.* London: RoutledgeFalmer, 126 y siguientes.

No obstante, los signos numéricos y las palabras son solo marcas sobre el papel y sonidos, que dependen para su interpretación de las experiencias previas que acompañan tanto a las acciones como a las imágenes y que han conducido a la generalización que simbolizan.

Así pues, el uso eficaz que los alumnos hacen de los signos en su pensamiento y comunicación o, en otras palabras, los cálculos que hacen, dependen de las experiencias previas que hayan tenido con representaciones *enactivas* e *icónicas* de números de objetos.

El aprendizaje de los alumnos dirigido a pensar y comunicarse de forma matemática con generalizaciones los conducirá finalmente a dominar la representación simbólica asociada (signos y palabras). A fin de alcanzar y mantener este dominio, no obstante, el camino que han de seguir pasa necesariamente por el uso de las representaciones *enactiva* e *icónica* (acción e imágenes). La enseñanza más eficaz, por tanto, implica que los alumnos trabajen las acciones, imágenes, palabras y símbolos que utilizan en la comunicación matemática.

Es importante recordar que el pensamiento y la comunicación matemáticos más eficaces a todos los niveles conllevan una compleja combinación de representaciones *enactivas, icónicas* y *simbólicas.* La acción y las imágenes siempre sirven de apoyo a la interpretación de símbolos matemáticos y en ningún momento debería esperarse que los alumnos dejen atrás las acciones para pasar a un pensamiento adulto. A medida que el pensamiento de los niños se desarrolla, estos *interiorizan* las acciones e imágenes que les han conducido al uso eficaz de los símbolos, pero los materiales e imágenes siempre deberían estar disponibles en las aulas para que puedan recurrir a ellos cada vez que se encuentren ante nuevas ideas o repasen las ya conocidas.

Como resumen de esta parte de la teoría sobre la que se apoya Numicon, los números y palabras son símbolos de vital importancia que gradualmente se convierten en cifras que representan objetos numéricos generalizados en la comunicación y en el pensamiento matemático avanzado.

Sin embargo, los símbolos, signos y palabras convencionales no pueden ilustrar ninguna relación entre números. Para que los niños aprendan a manejar las generalizaciones numéricas y sus conexiones de forma eficaz, necesitan contar con formas de acceder a la comunicación matemática y, por tanto, al pensamiento matemático con imágenes que los ayuden *a ver lo general en lo particular.*

Sfard denomina a los objetos e imágenes utilizados para este propósito *mediadores de comunicación,* dado que se usan para favorecer la comunicación con los alumnos. Dichos objetos e imágenes sirven, por tanto, para mediar en la comunicación matemática de los niños con ellos mismos.

Numicon introduce a los alumnos en el pensamiento y la comunicación de los números con una combinación de signos y palabras escritas y habladas, y a través de la mediación de esta comunicación simbólica con objetos e imágenes físicas (representaciones *enactiva* e *icónica*).

¿Qué mediadores de comunicación deberían usarse? ¿Importa cuáles sean?

Como se señaló previamente, el uso de las matemáticas se centra en las generalizaciones. Durante el aprendizaje de las matemáticas, las personas adquieren la capacidad de resolver una gran variedad de problemas matemáticos a medida que van ampliando el repertorio de generalizaciones.

Por lo general, los alumnos aprenden primero a generalizar sobre cantidades y a hablar de las mismas con sus profesores y, luego, recurren a estas generalizaciones cuando más adelante tienen que hacer cálculos que relacionan diferentes cantidades en situaciones cada vez más complejas.

La facilidad de los niños a la hora de *manejar* las generalizaciones llamadas números, su capacidad para hacer cálculos, por ejemplo, con números enteros, números positivos y negativos, fracciones… es fundamental para casi todo su progreso posterior con las matemáticas.

Trabajar con números conduce a los alumnos a un mundo de objetos inventados que están significativamente conectados. Es necesario que comiencen a realizar generalizaciones, después de establecer relaciones numéricas, porque si no sus cálculos seguirán siendo muy primitivos. Generalmente, los alumnos que no progresan en cálculo utilizan procedimientos de conteo laboriosos, muy básicos y poco eficaces. El análisis e interpretación de las relaciones entre los números hace posible la generalización y, a la vez, da pistas respecto a qué imágenes o ilustraciones resultarán de más ayuda para los niños.

Básicamente, para calcular con eficacia, los alumnos necesitan explorar las relaciones de los números entre sí. En otras palabras, necesitan investigar las diversas maneras en las que las generalizaciones sobre cantidades están conectadas unas con otras. Por ejemplo, la forma en que se ordenan los números es importante, como también lo son las equivalencias del tipo *6 + 2 es igual a 8.* El hecho de que las sumas de dos números, en el orden que sea, sean equivalentes al mismo número total es importante. Como también lo es el hecho de que, si se suman más de dos números, no importa el orden en que se haga. Los números «0» y «1» son peculiares en el sentido de que *sumar un 0* o *multiplicar por 1* no produce ningún efecto. La suma es el opuesto a la resta, de la misma manera que la multiplicación es lo contrario a la división. Curiosamente, sumar y multiplicar parecen estar estrechamente conectados entre sí, de la misma manera que la división y la resta. Estas son generalizaciones sobre cómo los números están relacionados unos con otros y revisten una importancia crucial de cara a la eficacia del cálculo de los alumnos.

El uso de colecciones no estructuradas de objetos para la representación de relaciones numéricas, como las mencionadas antes, es poco clara y solo para que los niños infieran unas relaciones a partir de ellas. Estos grupos no organizados de, por ejemplo, cubos y fichas, sirven para las primeras prácticas de conteo. Sin embargo, si como imágenes o ilustraciones siguen estando desorganizadas, constituyen un pobre fundamento para el cálculo. Es muy difícil mediar cualquier comunicación sobre relaciones numéricas con grupos de cosas no organizados.

Numicon elige objetos e imágenes con el objetivo específico de mediar en la comunicación de relaciones numéricas. En la comunicación matemática se introducen objetos e imágenes que ilustran o representan, por encima de todo, las formas en las que los números están conectados. Cuando se presentan colecciones aleatorias de objetos diversos, siempre se espera que los alumnos los pongan en orden: que establezcan relaciones en lo que ven.

Numicon utiliza una gran diversidad de acciones, objetos e imágenes para que los alumnos generalicen a partir de sus experiencias y conversaciones.

Se utilizan líneas numéricas de diversos tipos para contextualizar las relaciones de orden de los números, Formas Numicon para mostrar patrones y Regletas Numicon para que los niños puedan relacionar los tamaños de los números entre sí de muchas más formas de las que permiten las líneas numéricas.

Las colecciones de objetos no estructurados se introducen para que los alumnos puedan trabajar estructuras de orden (cuando cuentan) o para descubrir cuántas son sin tener que contar.

Numicon ofrece materiales manipulativos e imágenes especialmente adecuados para representar e ilustrar relaciones y presentar a los alumnos experiencias *enactivas* e *icónicas* que les permiten manipular representaciones *simbólicas* de sus generalizaciones (números y palabras) de forma eficaz durante el cálculo.

La importancia del contexto

Esta exposición comenzaba señalando que existe el deseo de que, cuando los alumnos terminen el colegio, puedan utilizar las matemáticas fuera del contexto escolar, en su vida cotidiana y en su trabajo. Dicho de otra forma, deberían saber resolver problemas matemáticos nuevos. De este modo, deben ser capaces de explorar y detectar relaciones claves en situaciones nuevas y desconocidas y usarlas para que se conviertan en predecibles.

Por lo general, el uso de las matemáticas también implica que los alumnos se adentren en el mundo de las generalizaciones matemáticas (cálculo) antes de volver a la situación práctica con uno o más números que deben ser interpretados dentro del contexto concreto del problema.

Los alumnos deben saber cuándo los datos y técnicas generalizados son útiles, a través del contexto y de lo que se habla. Dentro de Numicon, cada grupo de actividades comienza con un contexto cuidadosamente elegido en el que las matemáticas que han de aprenderse resultan útiles.

El trabajo comienza con un grupo de actividades que explica las relaciones dentro de las cuales se establece la necesidad de algún tipo de respuesta matemática; los alumnos comentan sus respuestas iniciales a las preguntas y desafíos planteados antes de pasar a generalizar las matemáticas que han de aprender a través de dichas actividades.

En las actividades prácticas, los alumnos tienen oportunidad de utilizar las matemáticas que están trabajando, en contextos más concretos, aprendiendo a juzgar cuándo dicha generalización matemática puede ser útil.

En las tareas de los cuadernos *(Primeros pasos con Numicon* (+ 3 años), *En marcha con Numicon* (+ 4 años) y *Bases firmes con Numicon* (+ 5 años), a los alumnos se les presentan desafíos que los invitan a utilizar las matemáticas que han estado aprendiendo en contextos no habituales y desconocidos. Estas tareas los animan a buscar relaciones en terrenos inexplorados.

En resumen

La clave para entender Numicon está en reconocer que usar las matemáticas implica aprender a **comunicarse matemáticamente** y cómo esta comunicación se realiza esencialmente mediante **generalizaciones.**

Durante la utilización de las matemáticas, a menudo las generalizaciones se transforman en *cosas* que no se pueden ver: *los objetos matemáticos.*

La comunicación es clave para el uso de las matemáticas, porque durante la misma se realizan las generalizaciones.

Sin embargo, la comunicación con generalizaciones no es fácil. Para ayudar a los alumnos a moverse entre el mundo de las generalizaciones matemáticas y el de las situaciones concretas, siempre se necesitará desarrollar la comunicación **mediante la actividad, el desarrollo de una imagen mental** y **hablando** mientras los niños exploran relaciones que pueden ver y sentir físicamente.

Glosario

Algunos de los términos utilizados en la *Propuesta metodológica: Numicon en el aula* se explican en el glosario que se presenta a continuación.

Aprendizaje: representaciones *enactiva, icónica* y *simbólica*

Jerome Bruner (1966) diferenció tres sistemas de representación mediante las que el ser humano transforma la información que le llega: *enactiva* (representaciones de hechos y experiencias por medio de la acción), *icónica* (mediante imágenes y esquemas espaciales más o menos complejos) y *simbólica* (mediante símbolos). En el enfoque Numicon se trata de combinar las tres formas de representación para que los niños experimenten las ideas numéricas a través de la acción, las imágenes y la conversación.

Bruner

Jerome Bruner (1915-) es un psicólogo estadounidense. Sus distinciones entre las representaciones enactiva, icónica y simbólica han ejercido una especial influencia en el campo de la educación.

Búsqueda del 10

La búsqueda del 10 es una técnica de cálculo que consiste en recurrir a la descomposición de uno de los sumandos de tal manera que se pueda completar el otro a diez, por ejemplo $8 + 9 = (8 + 2) + 7 = 17$ (Fig. 1).

Collar de cuentas

Conjunto de cuentas de colores, normalmente rojas y blancas, ensartadas en un cordón de diez en diez (diez rojas, diez blancas, diez rojas… Fig. 2). En el cordón hay espacio suficiente para mover las cuentas hacia delante y hacia atrás. Los niños conversarán sobre sus cálculos a la vez que usan el collar.

Cubos multibase

Conjunto de materiales estructurados diseñados para ayudar a los niños a comprender el sistema de numeración posicional. Son cubos, barras equivalentes a diez cubos, placas equivalentes a 100 cubos (o 10 barras) y cubos grandes formados de mil cubos pequeños. Se utilizan para favorecer la comprensión de la estructura de numeración decimal (unidades, decenas, centenas y millares Fig. 3).

Cifras: valor de posición

A menudo, los números se ordenan en tablas de varias columnas, cada una de las cuales se identifica con el valor que tiene cada cifra de ese número en esa posición (centenas, decenas o unidades). El número 2 en 327 tiene, por tanto, un valor de dos decenas.

Dígitos

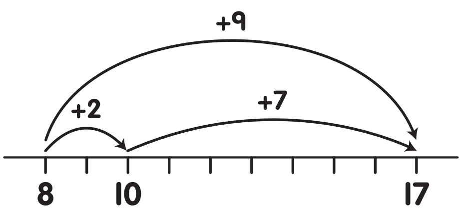
Los dígitos son símbolos utilizados para construir un número. Por ejemplo, el número 36 tiene dos dígitos. El sistema numérico decimal utiliza diez dígitos, del 0 al 9. El dígito 5 es la forma de decir *cinco.*

Enumerar

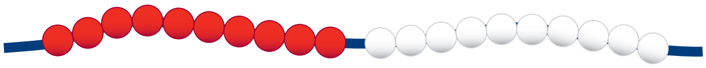
Nombrar cuántos objetos distintos hay en una colección. En Numicon, este término se utiliza en actividades que se centran en averiguar *cuántos hay* sin contar cada objeto individual; los niños lo hacen creando patrones con Formas Numicon.

Expresiones matemáticas

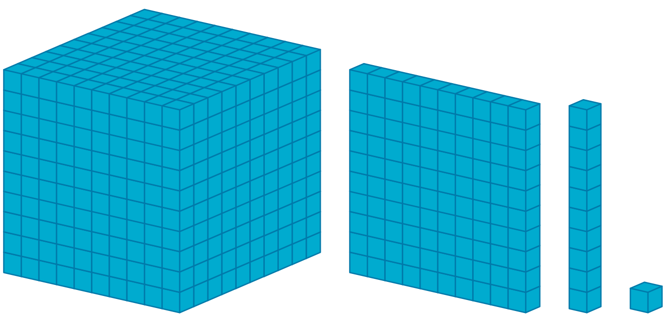
Las expresiones matemáticas se refieren a la escritura de una operación numérica de manera horizontal, de izquierda a derecha. Así, $4 + 23 = 27$ es una expresión matemática que está escrita de la misma forma que una oración con palabras en el lenguaje escrito.



1

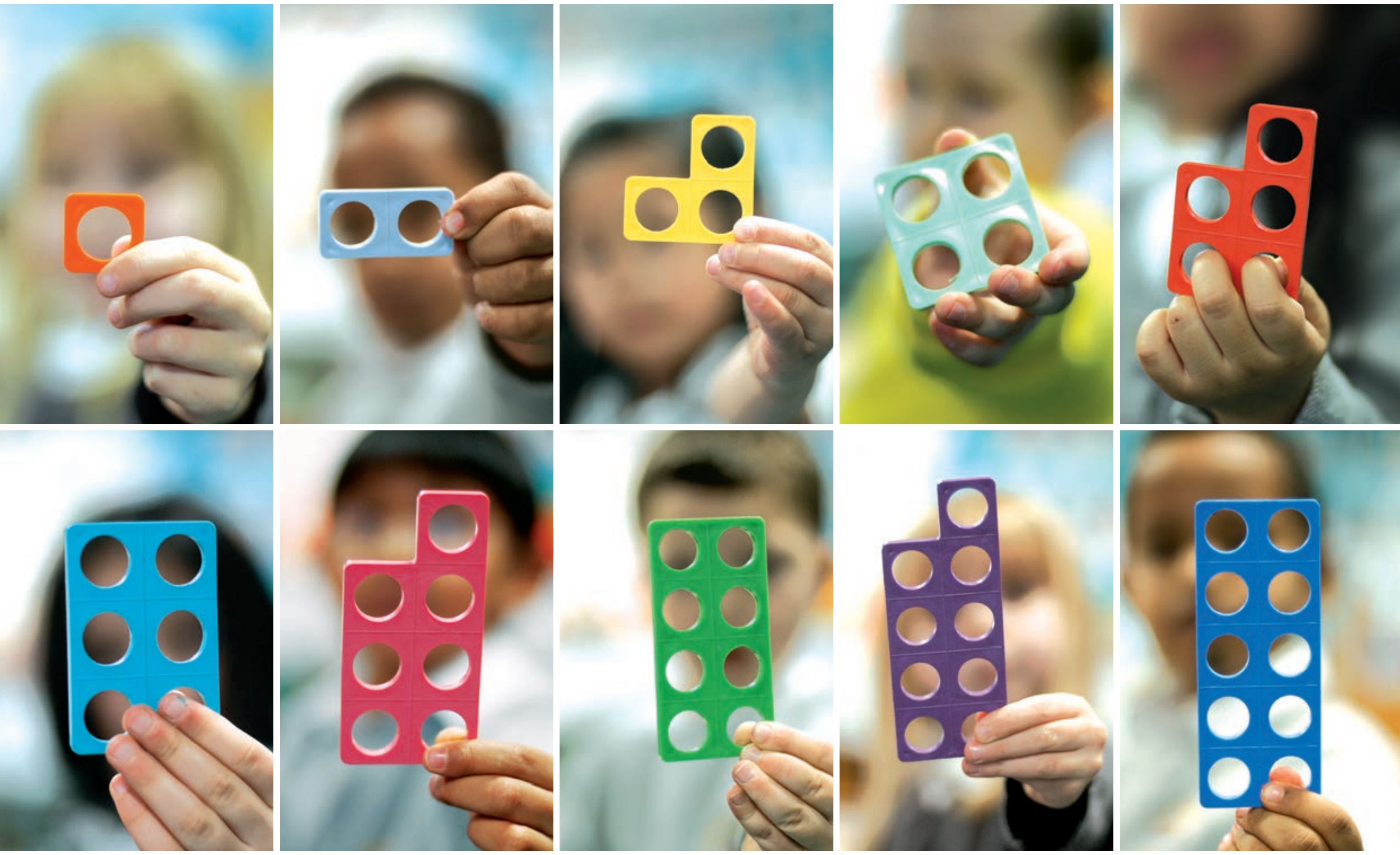


2



3

numicon



La Emoción de Aprender

OXFORD
UNIVERSITY PRESS

www.oxfordinfantil.es

8 435157 413731